САМАРСКИЙ ДВОРЕЦ ДЕТСКОГО И ЮНОШЕСКОГО ТВОРЧЕСТВА
САМАРСКАЯ ОБЛАСТНАЯ АСТРОНОМИЧЕСКАЯ ШКОЛА

РЕШЕНИЯ КОНКУРСНЫХ ЗАДАЧ ОЛИМПИАДЫ ПО АСТРОНОМИИ SAMRAS-2015 СРЕДИ УЧАЩИХСЯ 8-9 КЛАССОВ ЗАОЧНОГО ТУРА № 1

Задачи подготовил:
Филиппов Юрий Петрович,
научный руководитель школы,
старший преподаватель кафедры
общей и теоретической физики
Самарского государственного
университета, к.ф.-м.н.

Самара, 2015 г.

Уровень «Новичок» (уровень А)

Задача № 1. «Состав Солнечной системы и ее основные представители»

Условие. Представители каких классов астрономических объектов входят в состав Солнечной системы? (1 балл за каждый правильно названный класс).

Решение:

Прежде всего, необходимо определить понятие ***класс астрономических объектов*** – эта система тел или полей заполняющих космическое пространство, имеющих ряд схожих свойств в отношении 1) расположения и особенностей движения в пространстве, 2) внутреннего строения, 3) массы, размеров и плотности, 4) химического состава, 5) видов источников энергии и др.

В состав Солнечной системы входят представители следующих классов астрономических объектов

- *звезды* (Солнце);
- *классические планеты* (планеты земной группы – Меркурий, Венера, Земля, Марс; планеты-гиганты – Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун);
- *планеты-карлики* (Церера, Плутон, Эрида, Хаумеа, Макемаке);
- *спутники и кольца классических планет*;
- *Малые тела Солнечной системы* включают
  - астероиды (Эрос, Юнона, Паллада, Веста);
  - кометы (Галлея, Виртанена, Энке, Чурюмова-Герасименко);
  - объекты промежуточного класса (Иксион, Кентавры);
  - метеороиды.
- *Межпланетная среда* (пыль, газ, межпланетное магнитное поле, солнечный ветер, космические лучи);

Ответ: 1) звезды; 2) классические планеты; 3) планеты-карлики; 4) спутники и кольца классических планет; 5) малые тела Солнечной системы; 6) межпланетная среда. ($\$_{\max} = 6$ баллов).

Задача № 2. «Звезды, созвездия и летний треугольник»

Условие. Назовите имена ярких звезд, составляющих вершины летне-осеннего треугольника. В каких созвездиях они находятся? (3 балла).

Решение:

Летне-осенний треугольник – один из самых известных астеризмов, находящийся в северном полушарии небесной сферы. Вершины треугольника образуют три яркие звезды, принадлежащие трем разным созвездиям, – Вега (Альфа Лиры), Денеб (Альфа Лебедя) и Альтаир (Альфа Орла), см. рис. 1.

Данный астеризм лучше всего наблюдать летом и ранней осенью. В этот период вечерами данный астеризм находится в восточной и юго-восточной части небосвода, высоко над горизонтом. Октябрьскими вечерами его звезды видны высоко в небе на юге и юго-западе. Поздней осенью и зимой две его звезды – Вега и Денеб – видны на западе и северо-западе невысоко над горизонтом. Севернее 50° с.ш. Вега и Денеб вообще не заходят за горизонт; зимой даже после полуночи их можно увидеть в северной части неба.

Ответ: Вега (Альфа Лиры), Денеб (Альфа Лебедя) и Альтаир (Альфа Орла). ($\$_{\max} = 3$ балла).

Рис. 1: симуляция летне-осеннего треугольника в программе Stellarium.

.

Задача № 3. «Фотография кометы C/2014 E2 и ее физическая природа»

Условие. На фотографии (см. рис. 2) представлен образ кометы C/2014 E2 (Jacques), полученный 21 мая 2014 года. Комета видна как туманное пятнышко, с характерным туманным «отростком». Однако, в день открытия (13 марта 2014 года) она выглядела как точечный объект (см. рис. 3). Объясните физическую причину такого «перевоплощения» кометы. Какие основные составляющие в структуре кометы Вы обнаружили на рис. 2? (3 балла).

Решение:

Как известно, основной структурной составляющей кометы является ядро, которое представляет собой почти однородную смесь скальных пород и летучих космических льдов. Причем главной компонентой среди льдов является водяной лед. Комета была открыта 13 марта 2014 года на расстоянии около 3 а.е. от Солнца. На таких расстояниях от Солнца температура ядра является еще достаточно низкой и водяной лед только начинает сублимировать (испаряться) с поверхности ядра. При этом на фотографии (см. рис. 3) мы фактически видим ядро кометы. По мере сближения кометы с Солнцем, темпы сублимации быстро нарастают и вокруг ядра образуется достаточно плотная газопылевая оболочка, называемая *кома*. Под действием Солнечного света и ветра часть комы "выдувается" прочь от Солнца, порождая хвост кометы, который виден на фотографии, как туманный «отросток». Поскольку в окрестности Солнца (своего перигелия) комета движется с относительно большой скоростью, то образ кометы может изменяться в течение нескольких дней-недель. Т.о. на рис. 2 мы видим лишь кому и хвост (ядро не видно в принципе, в силу высокой непрозрачности комы).

Ответ: «Перевоплощение» кометы обусловлено сближением с Солнцем, нагревом ядра, увеличением темпов сублимации водяного льда и, как следствие, образованием комы – газопылевой оболочки вокруг ядра; на рис. 2 мы видим лишь кому и хвост. ($\$_{\max} = 3$ балла).

Рис. 2: комета C/2014 E2 Jacques. Фотография получена Р. Лигастри (Rolando Ligustri) 21 мая 2014 года.

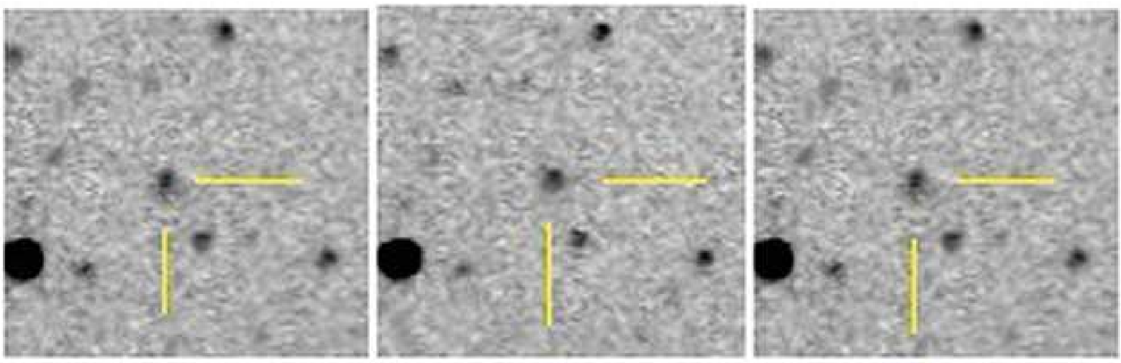

Рис. 3: комета C/2014 E2 Jacques. Фотография получена первооткрывателем – Cristyvao Jacques, 13 марта 2014 года.

Задача № 4. «О протяженности Самарской области вдоль меридиана и высоте полюса мира»

Условие. Как известно, протяженность Самарской области вдоль меридиана составляет 335 км. Какова географическая широта самой южной точки области, если широта самой северной точки –

$\varphi_N = 54°41'$? На сколько будет отличаться высота полюса мира для наблюдателей, находящихся в этих точках? В расчетах следует полагать, что Земля есть шар радиуса $\mathfrak{R}_\oplus = 6371$ км. (4 балла).

Дано:
$\ell = 335$ км,
$\varphi_N = 54°41'$,
$\mathfrak{R}_\oplus = 6371$ км.
Найти:
φ_S, $\Delta h_\odot$ - ?

Решение:

Пусть точка S_N – самая северная точка Самарской области, а S_S – самая южная ее точка (см. рис. 4). Географические широты данных точек, откладываемые вдоль меридиана от экватора Q_1Q_2, равны φ_N, φ_S соответственно. Разность географических широт $\Delta\varphi = \varphi_N - \varphi_S$. Последний угол соответствует дуге окружности $\ell = 335$ км. С другой стороны, окружность меридиана длиной $L = 2\pi\mathfrak{R}_\oplus$, отвечает углу в 360°. Составим пропорцию:

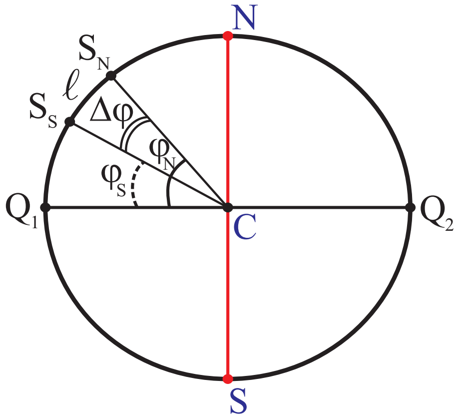

Рис. 4: к определению широты граничных точек Самарской области.

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &\rightarrow \ell, \\ 360° &\rightarrow L, \;\Rightarrow \Delta\varphi = 360°\left(\frac{\ell}{L}\right), \\ \Delta\varphi &= 360°\left(\frac{\ell}{2\pi\mathfrak{R}_\oplus}\right) = 3.013° = 3°01'. \end{aligned} \tag{1}$$

Широта самой южной точки Самарской области есть

$$\varphi_S = \varphi_N - \Delta\varphi = 54°41' - 3°01' = 51°40'. \tag{2}$$

Высота Солнца в верхней кульминации для наблюдателей в данных точках запишется в виде:

$$h_\odot^{(N)} = 90° - \varphi_N + \delta_\odot, \quad h_\odot^{(S)} = 90° - \varphi_S + \delta_\odot, \;\Rightarrow$$

$$\Delta h_\odot = h_\odot^{(S)} - h_\odot^{(N)} = \varphi_N - \varphi_S = \Delta\varphi = 3°01'. \tag{3}$$

Ответ: географическая широта самой южной точки Самарской области равна $\varphi_S = 51°40'$; высота Солнца в верхней кульминации в самой южной точке Самарской области будет больше на $\Delta h_\odot = 3°01'$ высоты светила в самой северной точке области. ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 5. «Путешественник и магнитный компас»

Условие. Куда прибудет земной путешественник, если он будет двигаться на северо-запад, ориентируясь по магнитной стрелке компаса? (4 балла).

Решение:

Как известно, магнитная стрелка компаса всегда ориентирована на южный магнитный полюс Земли, расположенный вблизи северного географического полюса. Двигаясь все время в направлении "северо-запад", путешественник будет двигаться по поверхности Земли по спирали, из области меньших широт в область больших. При этом по мере сближения с южным магнитным полюсом, радиус витка спирали уменьшается и путешественник все ближе будет подбираться к нему. В конечном счете путешественник прибудет в южный магнитный полюс Земли.

Ответ: путешественник прибудет в южный магнитный полюс Земли. ($\$_{\max} = 4$ балла).

Задача № 6. «Оценка угловых размеров составляющих кометы C/2014 E2»

Условие. С использованием фотографии кометы C/2014 E2 (см. рис. 2) оцените угловые размеры сферической составляющей кометы (туманного пятнышка), и видимой части туманного «отростка», если известно, что фотография охватывает участок неба с размерами $50' \times 50'$. (5 баллов).

Дано:	***Решение:***
$a' \times b' = 50' \times 50'$.	Определим угловой масштаб фотографии. По рисунку, с помощью линейки мы определяем размер фотографии – $a \times b = 14.2 \times 14.2$ см (ваш размер фотографии может отличаться от приведенного). Вычисляем угловой масштаб фотографии (его величина также может отличаться от приведенного):
Найти: $\ell'_{\rm coma}, \ell'_{\rm tail}$ – ?	$$\mu' = \frac{a'}{a} = 3.52'/\text{см}.$$

По фотографии определяем диаметр сферической составляющей кометы – *комы* («пятнышка») – $\ell_{\rm coma} = 1.6$ см и длину «отростка» – пылевого хвоста кометы – $\ell_{\rm tail} = 7.5$ см.

Зная масштаб фотографии и линейные размеры составляющих кометы, определенные по фотографии, вычислим угловые размеры составляющих кометы:

- Угловой диаметр комы – $\ell'_{\rm coma} = \mu' \, \ell_{\rm coma} = 5.63'$;
- Угловая длина хвоста кометы – $\ell'_{\rm tail} = \mu' \, \ell_{\rm tail} = 26.41'$.

Ответ: $\ell'_{\rm coma} = 5.63'$; $\ell'_{\rm tail} = 26.41'$. (5 баллов).

Уровень «Знаток» (уровень B)

Задача № 7. «Собственное движение кометы C/2014 E2 (Jacques)»

Условие. В период проведения Самарской областной летней астрономической школы 2014 года Бахтиновым П.И. были получены две фотографии кометы C/2014 E2 (Jacques) в два близких момента времени (моменты указаны на фото), представленные на рис. 5. Зная угловое расстояние между звездами A и B (оно составляет 35.6′), указанными на фотографиях, оцените собственное движение кометы (в град/сут). (6 баллов).

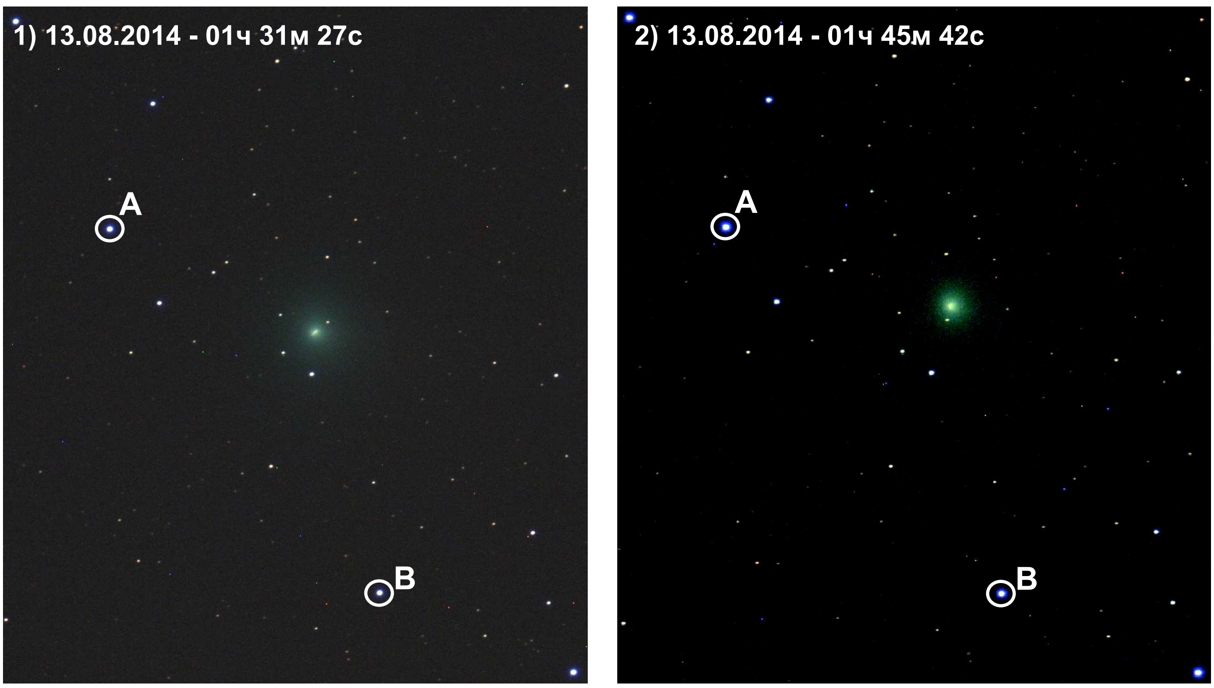

Рис. 5: две фотографии кометы C/2014 E2 (Jacques), сделанные Бахтиновым П.И. в период проведения Самарской областной летней астрономической школы 2014 года.

Дано:
$\ell'_{AB} = 35.6'$.
Найти:
$\omega - ?$

Решение:

Согласно определению, ***собственным движением*** (ω) небесного тела называется отношение величины угла ($\Delta\varphi$), на которое оно сместилось по небесной сфере (в результате изменения положения в космическом пространстве) за промежуток времени Δt, к величине этого промежутка, т.е.

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{4}$$

Промежуток времени, отделяющий моменты получения кадров, определяется как

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 1\,\text{час}\,45\,\text{мин}\,42\,\text{сек} - 1\,\text{час}\,31\,\text{мин}\,27\,\text{сек} = 855\,\text{сек}.$$

Определим угловой масштаб фотографий: для этого по фотографиям определяем линейное расстояние между звездами А и В – $\ell_{AB} = 95$ мм (ваш результат может отличаться от приведенного). Тогда угловой масштаб фотографий есть (его величина также может отличаться от приведенного):

$$\mu' = \frac{\ell''_{AB}}{\ell_{AB}} = 0.375'/\text{мм}. \tag{5}$$

Далее введем декартову систему координат (OXY), начало которой расположим в правом верхнем углу фотографии, ось OX направим горизонтально справа налево, а ось OY – вертикально сверху вниз. Затем определим координаты кометы на первой и второй фотографиях:

$$x_1 = 56\,\text{мм},\ y_1 = 67\,\text{мм},\ x_2 = 53.5\,\text{мм},\ y_2 = 61.5\,\text{мм},$$

Следовательно, линейное расстояние, пройденное кометой за данный промежуток времени, есть

$$\ell_c = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 6.042\,\text{мм}.$$

Тогда угол $\Delta\varphi$ определяется как

$$\Delta\varphi = \mu'\,\ell_c = 2.266'.$$

Т.о. собственное движение кометы есть

$$\omega = 2.650 \cdot 10^{-3\prime}/\text{сек} = 3.82^\circ/\text{сут}.$$

Ответ: $\omega = 3.82^\circ/$сут. (6 баллов).

Задача № 8. «Высота Венеры над горизонтом»

Условие. В один замечательный вечер астроном-любитель (рост которого равен 175 см), проживающий на пятом этаже девятиэтажного дома (см. рис. 6), вышел на балкон полюбоваться закатом. Он обнаружил, что вершину опоры линии электропередачи (схема которой представлена на рис. 7), расположенной в 80 метрах от дома, венчает Венера. Оцените высоту Венеры над горизонтом в момент наблюдений. (7 баллов).

Дано:
$h_a = 1.75$ м,
$H_1 = 34.0$ м,
$H_2 = 28.0$ м,
$L = 80$ м.
Найти:
$h_♀ - ?$

Решение:

Для определения угловой высоты Венеры над горизонтом в момент наблюдений необходимо, прежде всего, вычислить высоту положения глаз наблюдателя над поверхностью Земли. Для этого измерим по рисунку высоту положения пола балкона 5 этажа над поверхностью Земли – $h_1 = 6.6$ см и высоту всего здания – $h_2 = 15.1$ см. Определим высоту пола балкона в метрах:

$$h_b = H_2 \frac{h_1}{h_2} = 12.24\,\text{м}.$$

Рис. 6: фасад девятиэтажного дома. Здесь высота здания представлена в миллиметрах.

Следовательно, высота положения глаз наблюдателя над поверхностью Земли есть

$$h_y = h_b + h_a = 13.99\,\text{м}.$$

Следовательно, теперь можно определить линейную высоту вершины опоры линии электропередачи над уровнем глаз астронома-любителя:

$$h_v = H_1 - h_y = 20.01\,\text{м}.$$

Следовательно, тангенс угловой высоты Венеры определяется как

$$\operatorname{tg} h_{♀} = \frac{h_v}{L}, \;\Rightarrow\; h_{♀} = \operatorname{arctg}\left(\frac{h_v}{L}\right) = 14^\circ.$$

Ответ: $h_{♀} = \operatorname{arctg}\left(\frac{h_v}{L}\right) = 14^\circ$. (7 баллов).

Задача № 9. «Двойная нейтронная звезда и минимальный период ее обращения»

Условие. Одним из самых экзотических и пока не обнаруженных на эксперименте объектов является ***двойная нейтронная звезда*** (ДНЗ) – система из двух нейтронных звезд, связанных гравитационными силами. Предполагается, что *именно такие объекты являются основным источником гравитационных волн.* Согласно современным теоретическим моделям, максимальная масса нейтронной звезды оценивается величиной $\mathfrak{M}_{\max}^{(N)} = 3 \cdot \mathfrak{M}_{\odot}$ (здесь $\mathfrak{M}_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{30}$ кг – масса Солнца), при этом ее радиус равен $\mathfrak{R}^{(N)} = 10$ км. Определите минимально возможный период обращения вокруг общего центра масс компонент ДНЗ, если их массы одинаковы и равны $\mathfrak{M}_{\max}^{(N)}$, а радиусы равны $\mathfrak{R}^{(N)}$. (8 баллов).

Дано:
$\mathfrak{M}_{\max}^{(N)} = 3 \cdot \mathfrak{M}_{\odot}$,
$\mathfrak{M}_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{30}$ кг,
$\mathfrak{R}^{(N)} = 10$ км.

Найти:
$T_{\min}$ – ?

Решение:

Воспользуемся третьим обобщенным законом Кеплера для компонент двойной нейтронной звезды и системы «Солнце-Земля»:

$$\frac{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)T^2}{(\mathfrak{M}_{\odot} + \mathfrak{M}_{\oplus})T_{\oplus}^2} = \frac{(a_1 + a_2)^3}{a_{\oplus}^3}, \tag{6}$$

здесь $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ – массы компонент двойной системы, T – период их обращения вокруг центра масс; a_1, a_2 – большие полуоси эллиптических орбит компонент; $\mathfrak{M}_\odot, \mathfrak{M}_\oplus$ – массы Солнца и Земли, $T_\oplus, a_\oplus$ – сидерический период обращения и большая полуось земной орбиты ($T_\oplus = 365.2564$ сут $= 3.156 \cdot 10^7$ с, $a_\oplus = 1.496 \cdot 10^{11}$ м). Из выражения (6) следует, что

$$T = T_\oplus \sqrt{\frac{(a_1+a_2)^3}{a_\oplus^3} \frac{(\mathfrak{M}_\odot + \mathfrak{M}_\oplus)}{(\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2)}}.$$

Далее учтем, что масса Солнца много больше массы Земли ($\mathfrak{M}_\odot \gg \mathfrak{M}_\oplus$) и массы компонент двойной звезды равны $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 = 3\,\mathfrak{M}_\odot$. Тогда

$$T \approx T_\oplus \sqrt{\frac{(a_1+a_2)^3}{a_\oplus^3} \frac{\mathfrak{M}_\odot}{(3\mathfrak{M}_\odot + 3\mathfrak{M}_\odot)}} =$$

$$= T_\oplus \sqrt{\frac{1}{6} \frac{(a_1+a_2)^3}{a_\oplus^3}}.$$

Из последнего выражения следует, что чем меньше сумма $(a_1 + a_2)$, тем меньше период обращения компонент вокруг центра масс. Очевидно, что данная сумма не может быть меньше суммы радиусов данных звезд, т.е.

$$(a_1 + a_2) \geq (\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2) = 2\,\mathfrak{R}^{(N)}.$$

Следовательно,

$$T_{\min} = T_\oplus \sqrt{\frac{4}{3}\left(\frac{\mathfrak{R}^{(N)}}{a_\oplus}\right)^3} =$$

$$= 1.996 \cdot 10^{-11} \cdot T_\oplus = 6.298 \cdot 10^{-4} \text{ с}.$$

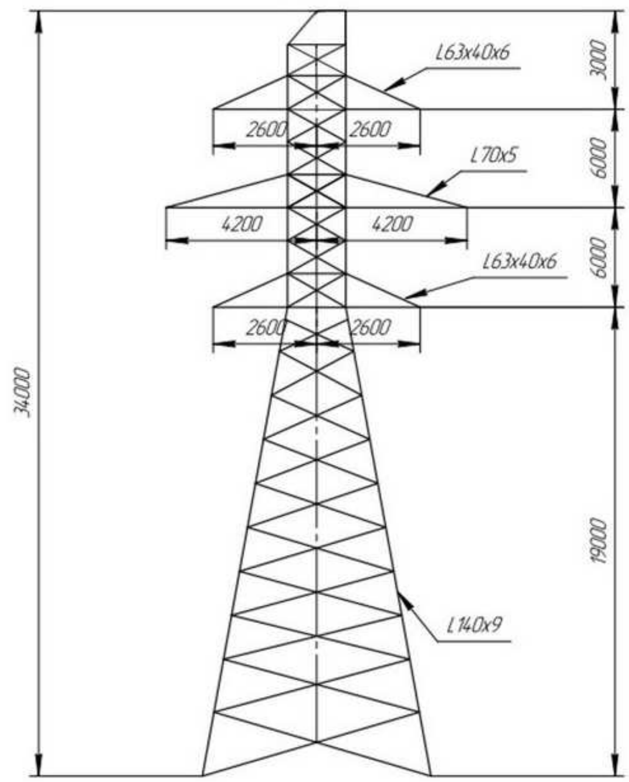

Рис. 7: схема опоры линии электропередачи. Здесь все масштабы представлены в миллиметрах.

Замечание: полученный результат определяет максимальную частоту вращения ДНЗ:

$$\nu_{\max} = \frac{1}{T_{\min}} = 1588\,\text{Гц}.$$

Данная величина определяет также максимальную частоту гравитационных волн, порождаемых ДНЗ и распространяющихся в пространстве, согласно общей теории относительности, и носит фундаментальный значение для поиска последних на эксперименте. Так LIGO (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) – лазерно-интерферометрическая гравитационно-волновая обсерватория, предназначенная для поиска гравитационных волн, в том числе и от ДНЗ, работает в диапазоне частот $30 \div 7000$ Гц. Именно гравитационные волны такого диапазона частот излучают двойные звезды, состоящие из белых карликов, нейтронных звезд и черных дыр.

Ответ: $T_{\min} = T_\oplus \sqrt{\frac{4}{3}\left(\frac{\mathfrak{R}^{(N)}}{a_\oplus}\right)^3} = 6.298 \cdot 10^{-4}$ с. ($\$_{\max} = 8$ баллов).

Задача № 10. «Гипотеза о смертоносной Немезиде»

Условие. В 1984 году профессор университета Беркли Ричард Мюллер (Richard Muller) выдвинул необычную гипотезу о существовании у Солнца звезды-спутника, названного «Немезидой» (по имени древнегреческой богини мщения). Данная гипотеза потребовалась изначально для того, чтобы объяснить периодичность явлений массовой гибели практически всего живого на нашей планете, обнаруженную палеонтологами Дэвидом Ропом (David Raup) и Джеком Сепкоским

(Jack Sepkoski). Согласно результатам их анализа геологических пластов, отвечающих разным эпохам, охватывающим последние 250 миллионов лет, отчетливо наблюдаются двенадцать событий, отвечающих резкому увеличению смертности живого на Земле. Промежуток времени между этими двумя ближайшими событиями составляет 26 миллионов лет. Роп и Сепкоский заключили, что такие события (включая предполагаемое исчезновение динозавров 65 миллионов лет назад) случались регулярно и могли иметь внеземную причину. Так, Немезида могла наводить гравитационные возмущения в облаке комет Оорта, что порождало ливень комет во внутренней части Солнечной системы и бомбардировку Земли. Последнее приводило к глобальной катастрофе и массовой гибели живого мира. Опираясь на имеющиеся результаты, оцените большую полуось орбиты Немезиды. Оцените дату следующего такого кометного ливня. (8 баллов).

Дано:
$T_1 = 250$ млн. лет,
$T_2 = 65$ млн. лет,
$T_N = 26$ млн. лет.

Найти:
ΔT, a – ?

Решение:

Согласно условию задачи, исчезновение динозавров (T_2 лет тому назад) приходится на один из таких кометных ливней. Если данное явление периодическое, то легко вычислить количество таких ливней прошедших в указанный период:

$$N = \left[\frac{T_2}{T_N}\right] = 2.$$

Тогда легко вычислить промежуток времени, отделяющий настоящий момент от момента наступления следующего ливня.

$$\Delta T = (N+1)\cdot T_N - T_2 = 13\,\text{млн. лет}.$$

Полагая, что масса Немезиды много меньше массы Солнца, воспользуемся третьим законом Кеплера в классической форме:

$$\frac{T_N^2}{T_\oplus^2} = \frac{a_N^3}{a_\oplus^3}, \;\Rightarrow\; a_N = a_\oplus \sqrt[3]{\frac{T_N^2}{T_\oplus^2}} = 87764\, a_\oplus = 87764 \text{ а.е.}$$

здесь $T_\oplus, a_\oplus$ – сидерический период обращения и большая полуось земной орбиты.

Ответ: через $\Delta T = 13$ млн. лет ожидается следующий кометный ливень; $a_N = 87764$ а.е. ($\$_{\max} = 8$ баллов).

Задача № 11. «Максимальное значение эксцентриситета орбиты Немезиды»

Условие. Опираясь на условие предыдущей задачи и полагая, что система «Солнце-Немезида» является устойчивой (последнее предположение означает, что орбита Немезиды должна целиком лежать внутри сферы Хилла Солнечной системы, радиус которой составляет 1.87 св. года), вычислите максимально допустимое значение эксцентриситета орбиты Немезиды. Вычислите также перигелийное расстояние Немезиды. (9 баллов).

Дано:
$R_{\text{Hill}} = 1.87$ св. года.

Найти:
$\varepsilon_{\max}^{(N)}, q^{(N)}$ – ?

Решение:

Согласно условию задачи, система «Солнце-Немезида» является устойчивой, следовательно, ее орбита должна целиком лежать внутри сферы Хилла Солнечной системы, следовательно для любого момента времени, гелиоцентрическое расстояние до Немезиды (r_N) не может превышать радиуса сферы Хилла (R_{Hill}), т.е.

$$r_N \le R_{\text{Hill}},$$

тогда афелийное расстояние ($Q^{(N)}$) орбиты Немезиды не может быть больше R_{Hill}:

$$Q^{(N)} \le R_{\text{Hill}},$$

Данное расстояние представляется в виде:

$$Q^{(N)} = a^{(N)}(1+\varepsilon^{(N)}), \;\Rightarrow\; \varepsilon^{(N)} = \frac{Q^{(N)}}{a^{(N)}} - 1. \tag{7}$$

где $a^{(N)}, \varepsilon^{(N)}$ – большая полуось и эксцентриситет орбиты Немезиды. Согласно решению предыдущей задачи – $a^{(N)} = 87764$ а.е. $= 1.388$ св. года. Т.о.

$$\varepsilon^{(N)}_{\max} = \frac{R_{\mathrm{Hill}}}{a^{(N)}} - 1 = 0.347.$$

Легко также вычислить перигелийное расстояние орбиты Немезиды:

$$q^{(N)} = a^{(N)}(1-\varepsilon^{(N)}) = 57267 \text{ а.е.} = 0.906 \text{ св. года.}$$

Ответ: $\varepsilon^{(N)}_{\max} = \frac{R_{\mathrm{Hill}}}{a^{(N)}} - 1 = 0.347$, $q^{(N)} = a^{(N)}(1-\varepsilon^{(N)}) = 57267$ а.е. ($\$_{\max} = 9$ баллов).

Задача № 12. «Светимость, средняя массовая плотность и блеск Немезиды»

Условие. Наиболее вероятным сценарием существования Немезиды является предположение о том, что это небесное тело есть коричневый карлик с массой не превышающей $0.042 \cdot \mathfrak{M}_\odot$, радиус которого близок к радиусу Юпитера $\mathfrak{R}_J = 71492$ км и температурой близкой к 2400 K. Оцените **а)** максимальное значение средней массовой плотности Немезиды, **б)** ее светимость (в светимостях Солнца), **в)** ее блеск в афелии и перигелии своей орбиты (опираясь на результаты решений двух предыдущих задач). (10 баллов).

Дано:
$\mathfrak{M}_N \le 0.042 \cdot \mathfrak{M}_\odot$,
$\mathfrak{R}_N \approx \mathfrak{R}_J = 71492$ км,
$T_N = 2400$ K.

Найти:
$\rho^{(N)}_{\max}, L_N$, – ?
$\mathfrak{R}_{BH}$ – ?

Решение:

Согласно определению, средняя массовая плотность Немезиды определяется отношением ее массы к объему ее тела (шара):

$$\rho^{(N)} = \frac{\mathfrak{M}_N}{V_N} = \frac{3}{4\pi}\frac{\mathfrak{M}_N}{\mathfrak{R}_N^3}. \tag{8}$$

Следовательно, максимальное значение массовой плотности достигается при максимальном значении массы Немезиды, т.е.

$$\rho^{(N)}_{\max} = \frac{3}{4\pi}\frac{0.042\cdot\mathfrak{M}_\odot}{\mathfrak{R}_J^3} = 54579\,\text{кг}/\text{м}^3.$$

Столь большую величину плотности Немезиды можно объяснить, тем что бóльшая часть ее вещества находится в особом квантовом состоянии – в состоянии ***вырожденного газа***.

Светимость Немезиды оценим по формуле

$$L_N = 4\,\pi\,\mathfrak{R}_N^2\,\sigma\,T_N^4 = 1.208\cdot10^{23}\,\text{Вт} = 3.16\cdot10^{-4}\,L_\odot. \tag{9}$$

Теперь легко оценить освещенность, создаваемую Немезидой у поверхности Земли, когда звезда находится в перигелии и афелии своей орбиты:

$$E_q \approx \frac{L_N}{4\,\pi\,q_N^2} = \frac{3.16\cdot10^{-4}}{4\,\pi\,(57267)^2} f_\odot = 1.044\cdot10^{-11}\,\text{Вт}/\text{м}^2, \;\text{ где }\; f_\odot = \frac{L_\odot}{4\,\pi\,a_\oplus^2} = 1361\,\text{Вт}/\text{м}^2.$$

$$E_Q \approx \frac{L_N}{4\,\pi\,Q_N^2} = \frac{3.16\cdot10^{-4}}{4\,\pi\,(118261)^2} f_\odot = 2.447\cdot10^{-12}\,\text{Вт}/\text{м}^2.$$

Учитывая далее, что освещенность, создаваемая звездой с звездной величиной (блеском) $m_0 = 0.0^m$ составляет $E_0 = 2.48\cdot10^{-8}$ Вт/м^2, можно легко вычислить отношения

$$\frac{E_0}{E_q} = 2375, \;\; \frac{E_0}{E_Q} = 10135.$$

Учитывая также, что отношение освещенностей, создаваемых двумя звездами у поверхности Земли, звездные величины которых отличаются на 1^m, равно 2.512, тогда

$$\frac{E_0}{E_q} = 2.512^{m_q} = 2375, \quad \frac{E_0}{E_Q} = 2.512^{m_Q} = 10135.$$

С использованием калькулятора и метода подбора можно показать, что $m_q = 8.4^m$, $m_Q = 10.0^m$. Т.о., согласно предложенному сценарию болометрическая звездная величина Немезиды заключена в интервале:

$$8.4^m \leq m_N^{(b)} \leq 10.0^m.$$

Замечание: видимый блеск Немезиды, определяемый в оптическом диапазоне, приблизительно на 5^m (величина болометрической поправки) больше указанных величин, поскольку Немезида – относительно холодное тело, которое излучает электромагнитные волны, главным образом, в инфракрасном диапазоне. Тогда в оптический телескоп данная звезда должна представляться объектом с видимым блеском, заключенном в интервале

$$13.4^m \leq m_N^{(v)} \leq 15.0^m.$$

Несмотря на столь большой блеск, предложенный сценарий существования такой Немезиды представляется крайне маловероятным, поскольку, к настоящему моменту выполнено множество полных обзоров небосвода с использованием мощных оптических телескопов (проницающая сила которых существенно выше указанных значений $m_N^{(v)}$), и астрономами-профессионалами не обнаружено объектов, схожих с Немезидой, согласно предложенному сценарию.

Ответ: $\rho_{\max}^{(N)} = \frac{3}{4\pi}\frac{0.042\cdot\mathfrak{M}_\odot}{\mathfrak{R}_J^3} = 54579\,\text{кг/м}^3$, $L_N = 4\,\pi\,\mathfrak{R}_N^2\,\sigma\,T_N^4 = 1.208\cdot10^{23}$ Вт $= 3.16\cdot10^{-4}\,L_\odot$, $m_q = 8.4^m$, $m_Q = 10.0^m$. ($\$_{\max} = 10$ баллов).

Уровень «Профи» (уровень C)

Задача № 13. «Проект солнечной электростанции "Desertec"»

Условие. В 2009 году рядом европейских государств был предложен проект Desertec – проект по построению крупнейшей в мире системы солнечных электростанций в пустыне Сахаре, стоимостью порядка 400 миллиардов евро. Согласно проекту, полная мощность установок должна составить 100 ГВт (такую же суммарную мощность производят 100 обычных электростанций). Зная светимость Солнца и расстояние до него, коэффициент прозрачности атмосферы для полного потока всего излучения – $\tau = 0.70$, среднее значение КПД солнечных батарей $\eta = 10\%$, оцените суммарную площадь рабочей поверхности солнечных батарей. Какую долю от площади пустыни Сахары ($S_d = 8.6\cdot10^6$ км^2), она составляет? Какое количество энергии с помощью такого источника энергии можно получить в идеальных условиях 21 марта? 23 сентября? (11 баллов).

Дано:
$P_{\rm us}^{\rm (tot)} = 10^{11}$ Вт,
$\tau = 0.70$,
$\eta = 10\%$,
$S_d = 8.6\cdot10^6$ км^2.

Найти:
S_s, χ, W – ?

Решение:

Согласно определению, коэффициент полезного действия (КПД) солнечной батареи есть

$$\eta = \frac{P_{\rm us}}{P_{\rm sp}}, \tag{10}$$

здесь $P_{\rm us}$ – мощность (полезная), выдаваемая солнечной батареей во внешнюю цепь; $P_{\rm sp}$ – мощность электромагнитного излучения Солнца, поглощаемого солнечной батареей электростанции, последняя величина есть также энергетический поток ($\Phi_{\rm fall}$) электромагнитных волн, упавших на рабочую поверхность батареи и поглощенных ею. Последний можно также представить в виде:

$$\Phi_{\rm fall} = E_{\rm fall}\cdot S_{\rm bat}, \tag{11}$$

здесь $E_{\rm fall}$ – освещенность, создаваемая Солнцем у поверхности Земли (предполагается, что солнечный свет падает вдоль прямой, почти перпендикулярной рабочей поверхности батареи); $S_{\rm bat}$ – площадь рабочей поверхности батареи. Поскольку атмосфера поглощает часть солнечного излучения, то коэффициент прозрачности есть

$$\tau = \frac{E_{\rm fall}}{f_\odot}, \ \Rightarrow \ E_{\rm fall} = \tau\, f_\odot, \tag{12}$$

здесь $f_\odot$ – ***солнечная постоянная*** – освещенность, создаваемая Солнцем у поверхности Земли без учета влияния ее атмосферы. Как известно, данная величина равна

$$f_\odot = 1361\,\text{Вт}/\text{м}^2.$$

В итоге полезная мощность батареи

$$P_{\rm us} = \eta\,\tau\, f_\odot\, S_{\rm bat}.$$

Следовательно, полная полезная мощность солнечной элетростанции есть сумма полезных мощностей всех ее батарей

$$P_{\rm us}^{\rm (tot)} = \sum_{i=1}^{N} P_{\rm us\,i} = \eta\,\tau\, f_\odot \sum_{i=1}^{N} S_{\rm bat\,i} = \eta\,\tau\, f_\odot\, S_s, \quad \text{где} \quad S_s = \sum_{i=1}^{N} S_{\rm bat\,i},$$

здесь предполагается, что все солнечные батареи одинаковые. Из последнего выражения следует, что

$$S_s = \frac{P_{\rm us}^{\rm (tot)}}{\eta\,\tau\, f_\odot} = \frac{10^{11}\,\text{Вт}}{0.7\cdot 0.1\cdot 1361\,\text{Вт}/\text{м}^2} = 1.050\cdot 10^{10}\,\text{м}^2 = 1.050\cdot 10^{4}\,\text{км}^2.$$

Доля, которую составляет рабочая поверхность всех батарей электростанции от площади пустыни Сахара есть:

$$\chi = \frac{S_s}{S_d}\times 100\% = 0.12\%.$$

Как известно, 21 марта и 23 сентября – это дни весеннего и осеннего равноденствия соответственно, когда продолжительность дня и ночи равны $\Delta t = 12$ часам. Если станция будет пребывать в идеальных условиях: данные дни будут ясными, КПД батарей не зависит от угла падения световых лучей и не изменяется в зависимости от температуры окружающей среды, рабочие поверхности батарей в течение дня не запылятся и т.д., то полная энергия выданная станцией будет равна

$$W = P_{\rm us}^{\rm (tot)}\,\Delta t = 4.32\cdot 10^{15}\,\text{Дж}.$$

<u>Ответ:</u> $S_s = \frac{P_{\rm us}^{\rm (tot)}}{\eta\,\tau\, f_\odot} = 1.050\cdot 10^4\,\text{км}^2$, $\chi = \frac{S_s}{S_d}\times 100\% = 0.12\%$, $W = P_{\rm us}^{\rm (tot)}\,\Delta t = 4.32\cdot 10^{15}$ Дж. ($\$_{\max} = 11$ баллов).

Задача № 14. «Площадь части небесной сферы»

<u>Условие.</u> Найти (угловую) площадь (в квадратных градусах) части небесной сферы, заключенной между кругами эклиптики и небесного экватора (12 баллов).

<u>Решение:</u>

Часть небесной сферы, заключенная между большими кругами эклиптики и небесного экватора, представляет собой два одинаковых сферических двуугольника (см. рис. 8, $\Upsilon E_1 \Omega A_1 \Upsilon$, $\Upsilon E_2 \Omega A_2 \Upsilon$).

Двуугольник в сферической геометрии – это многоугольник с двумя сторонами и двумя углами (см. рис. 9). В Евклидовой геометрии двуугольник считается невозможной фигурой, так как его две стороны совпадают. Но в сферической геометрии четыре двуугольника образуются

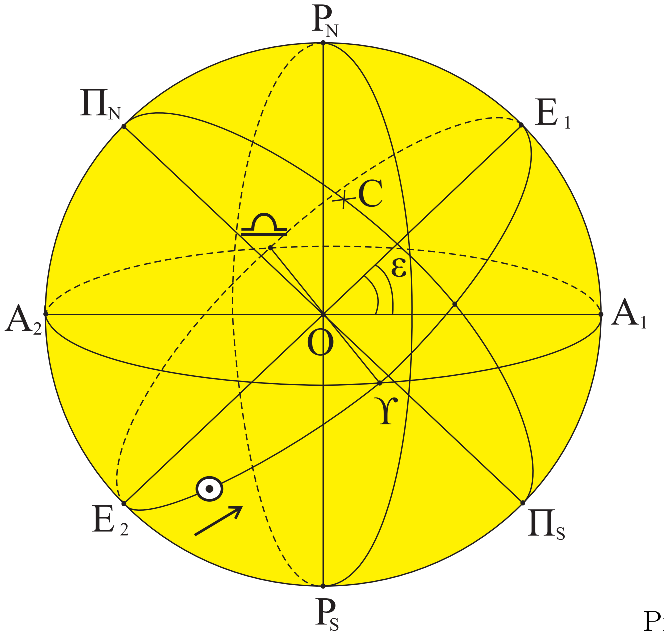

Рис. 8: к определению взаимного расположения небесного экватора и эклиптики.

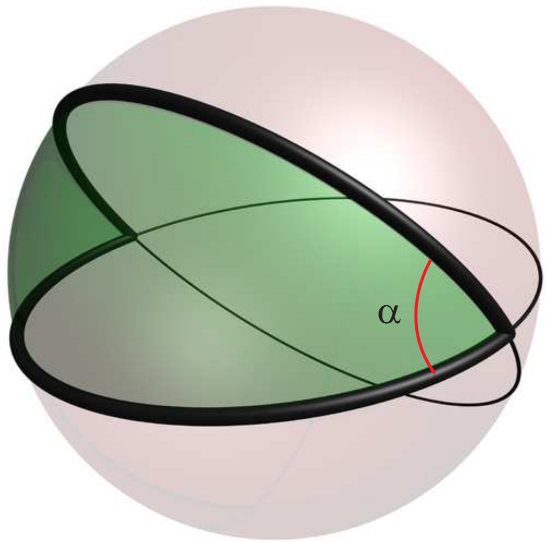

Рис. 9: к определению сферического двуугольника.

при пересечении двух больших окружностей. Площадь сферического двуугольника определяется формулой

$$S_{da} = 2\,R^2\,\alpha, \tag{13}$$

где R – радиус сферы, а α – ***угол раствора двуугольника*** (выраженный в радианах) – двугранный угол между плоскостями больших кругов, его порождающих. Откуда следует площадь поверхности сферы

$$S_{sphere} = 4\,\pi\,R^2.$$

Учитывая, что

- угловая площадь (телесный угол – Ω), отвечающая некоторой области на поверхности сферы, пропорциональна ее площади:

$$\Omega \sim S,$$

- угловая площадь, отвечающая все поверхности сферы, равна 41253 квадратных градуса,

можно составить следующую пропорцию

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_1\,\text{кв. град} \longrightarrow 2\,R^2\,\alpha, \\ 41253\,\text{кв. град} \longrightarrow 4\,\pi\,R^2, \end{array} \right\} \Longrightarrow \Omega_1 = 41253\left(\frac{2\,R^2\,\alpha}{4\,\pi\,R^2}\right) = 41253\left(\frac{\alpha}{2\,\pi}\right)\ \text{кв. град.} \tag{14}$$

В данном случае $\alpha = \varepsilon = 23°26' = 0.409$ рад, тогда $\Omega_1 = 2685$ кв. град. Следовательно, площадь двух таких двуугольников есть $\Omega_2 = 2\,\Omega_1 = 5370$ кв. град.

<u>Ответ:</u> $\Omega_2 = 5370$ кв. град. ($\$_{\max} = 12$ баллов).

Задача № 15. «Сфера тяготения классической планеты»

<u>Условие.</u> В небесной механике, при описании движения пробного тела T малой массы в гравитационных полях двух массивных тел 1 и 2 (причем $\mathfrak{M}_1 > \mathfrak{M}_2$) используется понятие ***гравитационной сферы тяготения*** – воображаемой поверхности, охватывающей меньшее по массе тело (тело 2), в каждой точке которой выполняется следующее условие: силы притяжения, действующие на пробное тело T со стороны тел 1 и 2 равны между собой по величине. Опираясь на данное определение, найдите явное аналитическое выражение для радиуса сферы тяготения системы «Солнце-классическая планета». Выполните численный анализ результата на примере 8 классических планет Солнечной системы. (13 баллов).

Дано:	***Решение:***
$\mathfrak{M}_1 > \mathfrak{M}_2$.	Согласно определению, ***сфера тяготения*** – воображаемая поверхность, охватывающая меньшее по массе тело (тело 2), в каждой точке которой выполняется следующее условие: силы притяжения, действующие на пробное тело T со стороны тел 1 и 2 равны между собой по величине:
Найти: R_{at} – ?	

$$|\vec{F}_{1T}| = |\vec{F}_{2T}|, \text{ или } \frac{G\,m\,\mathfrak{M}_1}{r_{1T}^2} = \frac{G\,m\,\mathfrak{M}_2}{r_{2T}^2}, \Rightarrow \left(\frac{r_{2T}}{r_{1T}}\right)^2 = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}. \qquad (15)$$

При записи (15) мы использовали закон всемирного тяготения Ньютона для двух гравитирующих материальных точек; здесь m – масса пробного тела Т; r_{1T}, r_{2T} – расстояния от пробного тела до указанных массивных тел 1 и 2. Внутри сферы тяготения притяжение планеты превосходит солнечное тяготение.

Можно строго доказать[1], что данная поверхность есть сфера (с точки зрения геометрии), центр которой, в случае $\mathfrak{M}_2 \ll \mathfrak{M}_1$ (что имеет место в случае всех классических планет), фактически совпадает с центром планеты (тело 2). В этом случае $R_{\text{at}} = r_{2T}$, при этом $r_{1T} = r_{12} - r_{2T}$ – в случае точки данной сферы, лежащей на прямой, соединяющей массивные тела, где r_{12} – гелиоцентрическое расстояние планеты от Солнца. Тогда (15) можно представить в виде:

$$\left(\frac{R_{\text{at}}}{r_{12} - R_{\text{at}}}\right)^2 = \mu, \;\rightarrow\; R_{\text{at}} = r_{12}\frac{\sqrt{\mu}}{1+\sqrt{\mu}} \approx \sqrt{\mu}\, r_{12}, \quad \text{где } \mu = \frac{\mathfrak{M}_2}{\mathfrak{M}_1}.$$

Проведенный численный анализ полученного результата (в случае когда $r_{12} = a_P$, где a_P – большая полуось орбиты планеты) для восьми классических планет, дает следующие значения радиусов их сфер тяготения:

Планета	a_P, млн. км	μ	R_{at}, тыс. км	Планета	a_P, млн. км	μ	R_{at}, млн. км
Меркурий	57.909	$1.674 \cdot 10^{-7}$	23.69	Юпитер	778.547	$9.548 \cdot 10^{-4}$	23.34
Венера	108.209	$2.448 \cdot 10^{-6}$	169.29	Сатурн	1433.449	$2.858 \cdot 10^{-4}$	23.83
Земля	149.598	$3.003 \cdot 10^{-6}$	259.23	Уран	2876.679	$4.366 \cdot 10^{-5}$	18.88
Марс	227.944	$3.227 \cdot 10^{-7}$	129.49	Нептун	4503.444	$5.150 \cdot 10^{-5}$	32.09

Таблица 1: значения радиусов сфер тяготения для восьми классических планет (определенных по отношению к Солнцу).

Ответ: $R_{\text{at}} = r_{12}\frac{\sqrt{\mu}}{1+\sqrt{\mu}} \approx \sqrt{\mu}\, r_{12}$, значения радиусов сфер тяготения классических планет представлены в таблице 1. ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 16. «Время жизни Солнца на стадии желтого карлика»

Условие. Согласно, современным представлениям время пребывания Солнца на стадии желтого карлика сегодня составляет 4.57 млрд. лет (при этом Солнце находится на главной последовательности диаграммы Герцшпрунга-Рассела). Общее время жизни Солнца на данной стадии определяется временем горения водорода в его ядре. Полагая, что масса ядра Солнца составляет $\eta_N = 0.1$ от его полной массы, а его светимость останется неизменной в течение всего времени жизни и равной настоящей, оцените оставшееся время жизни Солнца на стадии желтого карлика. (13 баллов).

Дано:	***Решение:***
$T_{\text{age}} = 4.57$ млрд. лет, $\eta_N = 0.1$.	Согласно условию задачи, Солнце будет пребывать на стадии желтого карлика до тех пор, пока не сгорит весь водород в его ядре (посредством термоядерных реакций) и превратится в гелий. При этом энергия, выделяющаяся в результате горения водорода должна выноситься прочь
Найти: τ_{life} – ?	

[1]См. например, страницу http://www.astronet.ru/db/msg/1171221.

посредством света (электромагнитных волн). Воспользуемся формулой Эйнштейна (для ядра Солнца) для двух близких моментов времени (t_1 и t_2):

$$t_1: \; E_1 = \mathfrak{M}_{N\,1}\, c^2, \quad t_2: \; E_2 = \mathfrak{M}_{N\,2}\, c^2.$$

Вычтем из второго уравнения первое с учетом $\Delta E = E_2 - E_1$, $\Delta\mathfrak{M}_N = \mathfrak{M}_{N\,2} - \mathfrak{M}_{N\,1}$, $\Delta t = t_2 - t_1$.

$$\Delta E = \Delta\mathfrak{M}_N\, c^2,$$

разделим данное уравнение на время Δt, тогда

$$\left(\frac{\Delta E}{\Delta t}\right) = \left(\frac{\Delta\mathfrak{M}_N}{\Delta t}\right) c^2, \;\Rightarrow\; \frac{\Delta\mathfrak{M}_N}{\Delta t} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta E}{\Delta t}\right) = -\frac{L_\odot}{c^2}.$$

Последнее уравнение определяет скорость уменьшения (на это указывает знак «-») массы ядра Солнца, которая, очевидно, есть постоянная величина (в последнем выражении $L_\odot = 3.827 \cdot 10^{26}$ Вт – светимость Солнца в настоящий момент). Тогда легко записать закон изменения массы ядра Солнца (по аналогии с законом равномерного прямолинейного движения):

$$\mathfrak{M}_N = \mathfrak{M}_N^{(0)} - \left(\frac{L_\odot}{c^2}\right) t.$$

Из последнего выражения следует, что в некоторый конечный момент времени t_f, определяемое выражением

$$t_f = \left(\frac{(\mathfrak{M}_N^{(0)} - \mathfrak{M}_N^{(He)})\, c^2}{L_\odot}\right) \tag{16}$$

водород в ядре полностью выгорит и образуется гелиевое ядро с массой $\mathfrak{M}_N^{(He)} = \eta_N^{(He)}\,\mathfrak{M}_\odot$. Для определения величины последнего вычислим энергию, выделяющуюся в одном акте термоядерного цикла горения водорода. В результате слияния четырех протонов образуется одно ядро гелия ${}^4_2He$, следовательно, энергия выделяемая в данном процессе есть:

$$\Delta E = 4m_p c^2 - m_{He} c^2 = 4.11507 \cdot 10^{-12}\,\text{Дж} = 2.56842 \cdot 10^7\,\text{эВ}. \tag{17}$$

здесь учтено, что $m_p = 1.672621777 \cdot 10^{-27}$ кг – масса протона, $m_{He} = 6.644656 \cdot 10^{-27}$ кг – масса ядра гелия ${}^4_2He$ (α-частицы), $c = 299792458$ м/с – скорость света в вакууме; 1эВ $=1.6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Т.о., выделяется энергия $\Delta E = 25.684$ МэВ. Далее учтем, что энергия покоя протона $E_p = m_p c^2 = 938.272$ МэВ, следовательно, энерговыделение посредством света (электромагнитных волн) данных термоядерных циклов на единицу массы η_γ есть

$$\eta_\gamma = \frac{\Delta E_\gamma}{4E_p} = 6.843 \cdot 10^{-3}. \tag{18}$$

Следовательно, доля η_γ от исходной энергии покоя ядра Солна превратится в энергию излучения, а масса гелиевого ядра будет равна $\mathfrak{M}_N^{(He)}) = (1 - \eta_\gamma)\mathfrak{M}_N^{(0)}$. Тогда (16) запишется в виде:

$$t_f = \eta_N\, \eta_\gamma \left(\frac{\mathfrak{M}_\odot\, c^2}{L_\odot}\right) = 3.201 \cdot 10^{17}\,\text{с} = 10.14 \cdot 10^9\,\text{лет}.$$

Зная полное время t_f пребывания Солнца на стадии желтого карлика и уже прошедшее время T_{age}, можно вычислить оставшееся время пребывания на данной стадии:

$$\tau_{\text{life}} = t_f - T_{\text{age}} = 5.57\,\text{млрд. лет}.$$

Ответ: $\tau_{\text{life}} = 5.57$ млрд. лет. ($\$_{\max} = 13$ баллов).

Задача № 17. «Венера и МКС»[2]

Условие. На рис. 10 представлена стробоскопическая фотография прохождения Международной космической станции (МКС) рядом с Венерой. С использованием этой фотографии, оцените

а) расстояние до Венеры и ее видимый угловой размер;

б) видимый размер МКС и расстояние до нее, полагая, что размах солнечных батарей МКС равным 100 м;

в) высоту МКС над горизонтом (и соответственно, Венеры), полагая что высота орбиты МКС равна 400 км. (14 баллов).

Рис. 10: стробоскопическая фотография прохождения Международной космической станции (МКС) рядом с Венерой.

Дано:
$D_{\text{ISS}} = 10^2$ м,
$H = 400$ км.
Найти:
Δ, D''_V – ?
D''_{ISS}, r_{ISS} – ?
h_{ISS} – ?

Решение:

а) для определения геоцентрического расстояния (Δ) Венеры рассмотрим плоский треугольник (см. рис. 11.a) $\triangle SVE$, образованный Солнцем (S), Венерой (V) и Землей (E) и воспользуемся теоремой косинусов для определения стороны $SE = r_\oplus$ – гелиоцентрического расстояния Земли:

$$r_\oplus^2 = r_V^2 + \Delta^2 - 2\, r_V\, \Delta\, \cos\varphi. \tag{19}$$

Здесь r_V – гелиоцентрическое расстояние Венеры, φ – ***фазовый угол*** Венеры – угол между направлениями на Землю и на Солнце, если смотреть из центра Венеры (см. рис. 11.a).

Из уравнения (19) следует квадратное уравнение относительно переменной Δ:

$$\Delta^2 - 2\, r_V\, \Delta\, \cos\varphi + r_V^2 - r_\oplus^2 = 0. \tag{20}$$

В силу малости эксцентриситетов орбит Земли и Венеры, последние можно считать круговыми, тогда гелиоцентрические расстояния планет равны их большим полуосям – $r_V = a_♀ = 0.723$ а.е., $r_\oplus = a_\oplus = 1.000$ а.е.

[2]Автор исходного варианта задачи – Гришин Кирилл, доработку выполнил Филиппов Ю.П.

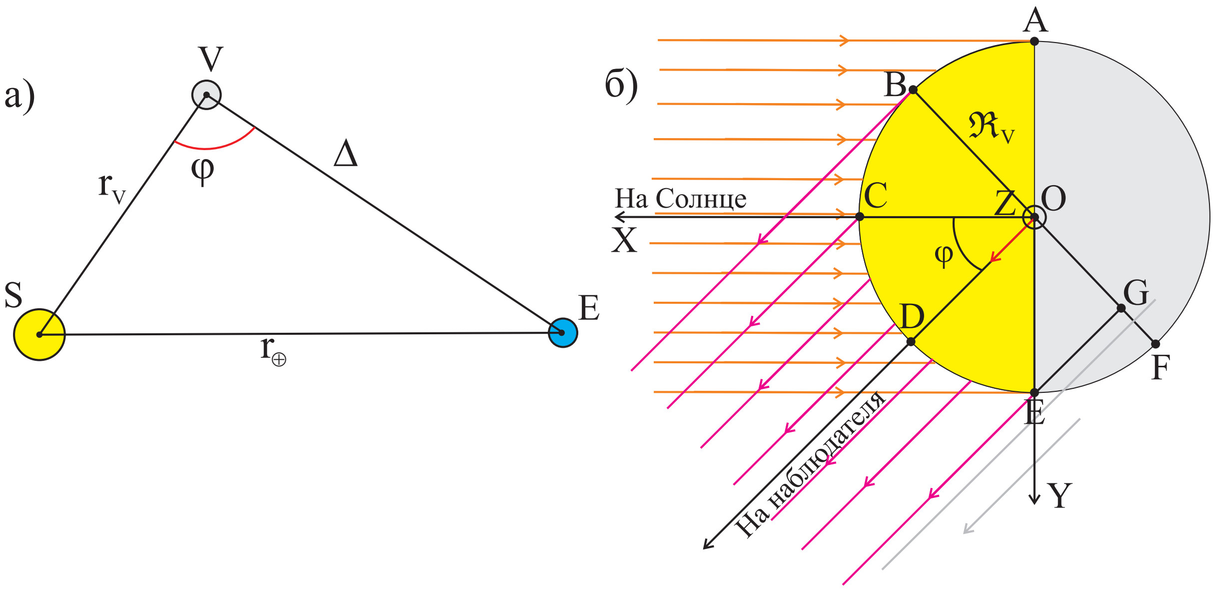

Рис. 11: к определению а) фазового угла Венеры, б) ее фазы.

Для решения уравнения (20) необходимо определить фазовый угол φ. Последний определяет ***фазу Венеры*** Φ_V – безразмерную величину, равную отношению площади ($S_{\rm obs}$) освещенной части диска планеты, видимой для земного наблюдателя к площади ($S_{\rm tot}$) всей поверхности диска, обращенного к наблюдателю (см. рис. 11.б), т.е.

$$\Phi_V = \frac{S_{\rm obs}}{S_{\rm tot}}. \qquad (21)$$

Можно показать, что фаза Венеры может быть представлена в виде:

$$\Phi_V = \frac{d_{\rm obs}}{\mathfrak{D}_N}, \quad \text{или} \quad \Phi_V = \frac{1}{2}\,(1+\cos\varphi)\,, \qquad (22)$$

где $d_{\rm obs} = BG$ – ширина серпа Венеры, которую можно легко определить по рисунку (в нашем случае $d_{\rm obs} = 3.5$ мм), $\mathfrak{D}_N = BF$ – диаметр видимого диска Солнца (по рисунку данная величина есть расстояние между вершинами серпа – $\mathfrak{D}_N = 14$ мм). В результате фаза $\Phi_V = 0.25$. Тогда нам становится известным $\cos\varphi$:

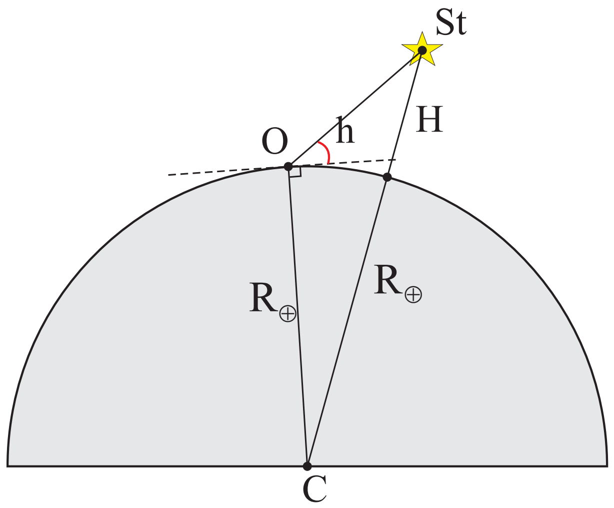

Рис. 12: к определению угловой высоты положения МКС.

$$\cos\varphi = 2\Phi_V - 1 = -0.5.$$

В результате уравнение (20) представляется в виде:

$$\Delta^2 + 2\,r_V(1-2\Phi_V)\Delta - (r_\oplus^2 - r_V^2) = 0.$$

физический корень которого есть

$$\Delta = -r_V(1-2\Phi_V) + \sqrt{r_V^2(1-2\Phi_V)^2 + (r_\oplus^2 - r_V^2)^2} = 0.42 \text{ а.е.}$$

Зная расстояние до планеты можно легко определить ее угловой диаметр D_V'':

$$D_V'' = \frac{D_V}{\Delta} \times 206265'' = \frac{12103\,\text{км}}{0.42\cdot 1.496\cdot 10^8\,\text{км}} \times 206265'' = 39.7'' \approx 40''.$$

здесь $D_V = 12103$ км – диаметр Венеры.

б) Зная угловой диаметр планеты и ее линейный диаметр, определенный по фотографии можно легко определить угловой масштаб фотографии (ваш результат может несколько отличаться от ниже приведенного):

$$\mu'' = \frac{D''_V}{d_V} = \frac{40''}{14\,\text{мм}} = 2.86''/\,\text{мм}.$$

Далее определяя наибольшую протяженность МКС по фотографии в мм ($\ell_{\rm ISS} = 14$ мм), можно определить ее угловой диаметр $D''_{\rm ISS}$ и расстояние $r_{\rm ISS}$ до нее:

$$D''_{\rm ISS} = \mu'' \cdot \ell_{\rm ISS} = 40'',\ \ r_{\rm ISS} = \frac{D_{\rm ISS}}{D''_{\rm ISS}} \approx 516\,\text{км}.$$

в) Для определения угловой высоты МКС ($h_{\rm ISS}$) над горизонтом рассмотрим плоский треугольник $\triangle OCSt$, составленный из наземного наблюдателя (O), центра Земли (C) и МКС (St), см. рис. 12. Воспользуемся теоремой косинусов для данного треугольника:

$$(R_\oplus + H)^2 = R_\oplus^2 + r_{\rm ISS}^2 - 2\,r_{\rm ISS}\,R_\oplus\,\cos(90^\circ + h_{\rm ISS}),\ \Rightarrow\ (R_\oplus + H)^2 = R_\oplus^2 + r_{\rm ISS}^2 + 2\,r_{\rm ISS}\,R_\oplus\,\sin h_{\rm ISS},$$

здесь $R_\oplus = 6371$ км – средний по объему радиус Земли-шара; H – высота орбиты МКС. Из последнего уравнения следует выражение для $h_{\rm ISS}$:

$$h_{\rm ISS} = \arcsin\left(\frac{2\,H\,R_\oplus + H^2 - r_{\rm ISS}^2}{2\,R_\oplus\,r_{\rm ISS}}\right) \approx 49^\circ.$$

<u>Ответ:</u> а) $\Delta = -r_V(1-2\Phi_V) + \sqrt{r_V^2(1-2\Phi_V)^2 + (r_\oplus^2 - r_V^2)^2} = 0.42$ а.е., $D''_V \approx 40''$; б) $D''_{\rm ISS} = 40''$, $r_{\rm ISS} \approx 516$ км; в) $h_{\rm ISS} = \arcsin\left(\frac{2\,H\,R_\oplus + H^2 - r_{\rm ISS}^2}{2\,R_\oplus\,r_{\rm ISS}}\right) \approx 49^\circ$. ($\$_{\max} = 14$ баллов).

Задача № 18. «Постоянная Хаббла и возраст Вселенной»[3]

<u>Условие.</u> В таблице 2 представлены данные измерений расстояний (D) до 20 галактик (или их скоплений) и их лучевых скоростей (V_r). В 1929 году знаменитый американский астроном Эдвин Хаббл по данным наблюдений за цефеидами установил зависимость лучевой скорости галактики (V_r) от расстояния до нее (D). Эта зависимость носит название «закон Хаббла» и имеет вид:

$$V_r = H \cdot D, \tag{23}$$

здесь H – постоянная Хаббла. С использованием формулы (23) и данных таблицы 2

а) постройте график зависимости лучевой скорости галактики от расстояния D до нее. Найдите H и ошибку ее определения с использованием случайной погрешности среднего арифметического;

б) оцените Хаббловкий возраст Вселенной t_H и его погрешность, пользуясь соотношением вида

$$t_H = \frac{1}{H}. \tag{24}$$

В вычислениях следует использовать следующие размерности величин: $[D]$ = Мпк; $[V]$ = км/с; $[H]$ =км/(с·Мпк). Случайная погрешность среднего арифметического определяется выражением:

$$\Delta H = t_n \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(\bar H - H_i)^2}{n(n-1)}}. \tag{25}$$

где $\bar H$ – среднее арифметическое значение постоянной Хаббла, H_i – i-ое значение постоянной Хаббла, n – количество полученных значений искомой постоянной, $t_n = 2.093$ – коэффициент Стьюдента для $n = 20$. (15 баллов).

№	Галактика (скопление галактик)	D, $\times 10^6$ св. лет	V_r (км/с)	№	Галактика (скопление галактик)	D, $\times 10^6$ св. лет	V_r (км/с)
1	M81	12	127	11	NGC3245	75	1308
2	Sculptor	9	177	12	NGC2768	75	1400
3	M101	25	363	13	NGC4038	70	1502
4	NGC2835	30	547	14	ESO505-3	75	1601
5	Leo I	35	702	15	NGC720	80	1717
6	NGC628	40	792	16	NGC4291	85	1802
7	Virgo I	52	895	17	NGC584	75	1907
8	Dorado	65	1000	18	NGC5962	90	2001
9	NGC3370	65	1099	19	NGC3613	105	2106
10	NGC3338	70	1198	20	M58 (NGC4579)	68	1517

Таблица 2: данные измерений (расстояние – D и лучевая скорость – V_r) для галактик и их скоплений.

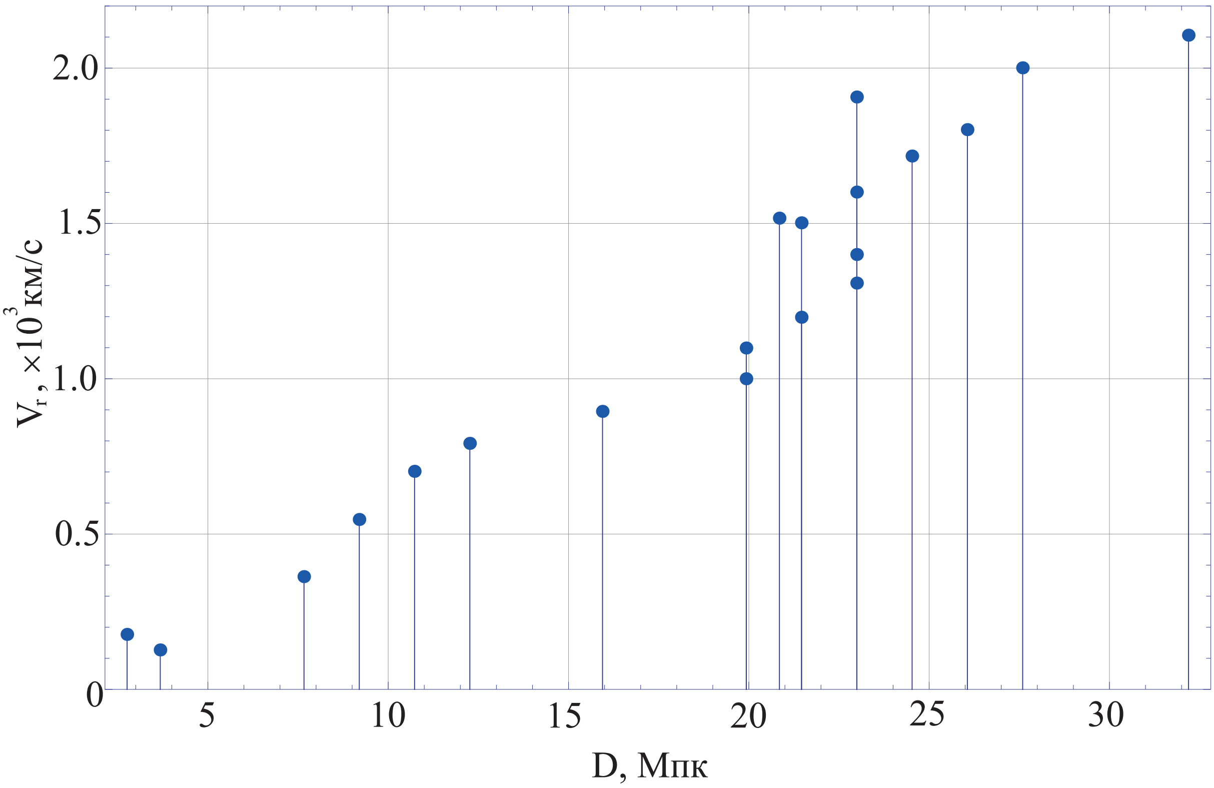

Рис. 13: Зависимость лучевой скорости V_r галактки от расстояния D до нее (для $n = 20$ галактик).

Решение:

а) Выражая расстояния в Мпк, а скорости в км/с, строим график зависимости $V_r(D)$ (см. рис. 13).

Затем для каждой галактики вычисляем постоянную Хаббла по формуле

$$H = \frac{V_r}{D}. \tag{26}$$

Результаты вычислений представлены в таблице 3.

Затем вычисляем среднее арифметическое для постоянной Хаббла по формуле

$$\bar{H} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} H_i = 62.146\,\frac{\text{км}}{\text{с}\cdot\text{Мпк}}, \quad \text{где} \quad n = 20.$$

[3]Автор исходного варианта задачи – Гришин Кирилл, доработку выполнил Филиппов Ю.П.

	Галактика	D, Мпк	V_r, Мпк	H, км/(с·Мпк)		Галактика	D, Мпк	V_r, Мпк	H, км/(с·Мпк)
1	M81	3.679	127	34.518	11	NGC3245	22.995	1308	56.882
2	Sculptor	2.759	177	64.145	12	NGC2768	22.995	1400	60.883
3	M101	7.665	363	47.358	13	NGC4038	21.462	1502	69.985
4	NGC2835	9.198	547	59.470	14	ESO505-3	22.995	1601	69.624
5	Leo I	10.731	702	65.418	15	NGC720	24.528	1717	70.002
6	NGC628	12.264	792	64.580	16	NGC4291	26.061	1802	69.146
7	Virgo I	15.943	895	56.137	17	NGC584	22.995	1907	82.932
8	Dorado	19.929	1000	50.179	18	NGC5962	27.594	2001	72.516
9	NGC3370	19.929	1099	55.146	19	NGC3613	32.193	2106	65.418
10	NGC3338	21.462	1198	55.820	20	M58 (NGC4579)	20.849	1517	72.763

Таблица 3: данные измерений (расстояние – D и лучевая скорость – V_r) для галактик и их скоплений.

Далее для каждой галактики вычисляем разность $(\bar{H} - H_i)$, а затем по формуле (25) вычисляем случайную погрешность среднего арифметического:

$$\Delta H = 5.034\,\frac{\text{км}}{\text{с}\cdot\text{Мпк}}.$$

Т.о. окончательное выражение для постоянной Хаббла с учетом ошибки представляется в виде:

$$\bar{H} \pm \Delta H = 62.146 \pm 5.034\,\frac{\text{км}}{\text{с}\cdot\text{Мпк}}.$$

б) Вычислим Хаббловкий возраст Вселенной:

$$t_H = \frac{1}{\bar{H}} = \frac{3.086\cdot 10^{19}}{62.146\,\frac{\text{км}}{\text{с}\cdot\text{км}}} = 4.966\cdot 10^{17}\,\text{с} = 15.73\,\text{млрд. лет},$$

Далее вычислим минимально возможное значение t_H:

$$t_H^{(\min)} = \frac{1}{\bar{H} + \Delta H} = \frac{3.086\cdot 10^{19}}{67.180\,\frac{\text{км}}{\text{с}\cdot\text{км}}} = 4.594\cdot 10^{17}\,\text{с} = 14.56\,\text{млрд. лет},$$

вычислим максимально возможное значение t_H:

$$t_H^{(\max)} = \frac{1}{\bar{H} - \Delta H} = \frac{3.086\cdot 10^{19}}{67.180\,\frac{\text{км}}{\text{с}\cdot\text{км}}} = 5.403\cdot 10^{17}\,\text{с} = 17.12\,\text{млрд. лет}.$$

Здесь мы учли, что 1 Мпк $= 3.086\cdot 10^{19}$ км.

Окончательно, Хаббловкий возраст равен: $t_H = 15.73^{+1.39}_{-1.17}$ млдр. лет.

Ответ: а) $\bar{H} \pm \Delta H = 62.146 \pm 5.034\,\frac{\text{км}}{\text{с}\cdot\text{Мпк}}$, б) $t_H = 15.73^{+1.39}_{-1.17}$ млдр. лет. ($\$_{\max} = 15$ баллов).